

08-04 Racines n -ièmes de l'unité**Définition et notation**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une **racine n -ième de l'unité** est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.

On note $\mathbf{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Exemples

$$\mathbf{U}_1 = \{ 1 \}$$

$$\mathbf{U}_2 = \{ -1 ; 1 \}$$

$$\mathbf{U}_3 = \{ 1 ; e^{i2\pi/3} ; e^{i4\pi/3} \}$$

Notation

Pour tout couple $(a ; b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a < b$, on note $\mathbf{[a ; b]}$ l'ensemble des entiers compris entre a et b .

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbf{U}_n = \{ e^{ik\pi/n} \mid k \in \mathbf{[0 ; n[} \}.$$

Remarques

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbf{U}_n$ compte n éléments.
- Les racines n -ièmes de l'unité sont les affixes des sommets du polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont l'un des sommets est le point U .

Exemple

Les racines 4-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets du carré de centre O dont l'un des sommets est U .

08-04 Applications**Application 1**

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

a] $z^4 = 1$

b] $(z + i)^5 = 1$

c] $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 = 1$

Application 2

Soit n un entier naturel strictement positif. Répondre aux questions suivantes en justifiant.

1. Le conjugué d'un élément de $\mathbb{U}_n$ est-il forcément un élément de $\mathbb{U}_n$?
2. La somme de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est-elle forcément un élément de $\mathbb{U}_n$?
3. Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est-il forcément un élément de $\mathbb{U}_n$?

Application 3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^5 = -i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$.

Application 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

Application 5

Résoudre dans $\mathbb{C} - \{1\}$ l'équation suivante : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = 1$

Application 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$.

Application 7

Soit $u \in \mathbb{U}_7$.

Calculer $S = u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + u^{10} + u^{12}$